

Problem Set 9: 数论初步

提交截止时间：4 月 1 日 10:00 前

Problem 1

设 a, b, c, d 均为正整数，下列命题是否为真？若为真，给出证明；否则，给出反例。

a) 若 $a \mid c, b \mid c$, 则 $ab \mid c$

b) 若 $a \mid c, b \mid d$, 则 $ab \mid cd$

c) 若 $ab \mid c$, 则 $a \mid c$

d) 若 $a \mid bc$, 则 $a \mid b$ 或 $a \mid c$

Problem 2

证明：若 p 是大于 3 的素数，则 $p^2 - 1$ 是 24 的倍数。

Problem 3

计算：

a) $23300 \bmod 11$

b) $2^{3300} \bmod 31$

c) $3^{516} \bmod 7$

Problem 4

证明：如果 $2^n - 1$ 是素数，则 n 也为素数。

Problem 5

证明：

a) 设 $d \geq 1, d \mid m$, 则 $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a \equiv b \pmod{d}$.

b) 设 $d \geq 1$, 则 $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow da \equiv db \pmod{dm}$.

c) 设 c 与 m 互质, 则 $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow ca \equiv cb \pmod{m}$.

Problem 6

借助于费马小定理证明如果 n 是一个正整数, 则 42 能整除 $n^7 - n$ 。

Problem 7

试证明: 若 $p \geq 7$ 为素数, 则 $240 \mid (p^4 - 1)$ 。

Problem 8

证明: 若 m 和 n 互质, 则 $m^{\phi(n)} + n^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{mn}$ 。

Problem 9

证明: 对于任意小于 n 且与 n 互质的正整数 a , 存在一个小于 n 且与 n 互质的正整数 b , 使得 $ab \equiv 1 \pmod{n}$ 。

Problem 10

证明: 若 p 为素数, 则 \sqrt{p} 为无理数。